# Contrôle de Mathématiques

**Les machines à calculer ne sont pas autorisées**

**Exercice 1 :** **QCM : VRAI ou FAUX**

**→ Si la réponse est FAUX, donner un contre exemple ou la bonne réponse.**

1) $\mathbb{Z}$ s'appelle l'ensemble des entiers naturels.
2) $\mathbb{N}$ s'appelle l'ensemble des entiers relatifs.
3) **D** est l'ensemble des nombres pouvant s'écrire sous la forme :

   $\frac{\text{a}}{10^{\text{n}}}$ avec a entier relatif et n entier naturel.

4) $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres pouvant s'écrire sous la forme :

   $\frac{a}{b}$ avec a entier relatif et b entier naturel non nul.

5) $\mathbb{Q}$ est inclus dans **D**.
6) Un nombre irrationnel est un nombre qui s'écrit à l'aide d'une racine.
7) Un nombre entier naturel est un nombre premier signifie qu'il admet exactement 2 diviseurs entiers naturels : 1 et lui-même.

**Exercice 2 :**

Après avoir simplifié au maximum les nombres suivants, donner le plus petit ensemble auquel ils appartiennent.

a) $\frac{24,6}{10,8}$ b) $\frac{\sqrt{56}}{2\sqrt{40}}$ c) $\frac{15}{25}-\frac{2}{15}$ d) $\frac{21-7\pi}{33-11\pi}$ e) $3\left(3\sqrt{3}-\sqrt{48}\right)^2$

**Exercice 3 :**

**1)** a) Donner les décompositions en facteurs premiers de 234 et 180.

b) Rendre irréductible la fraction $G=\frac{234}{180}$

c) Simplifier l'expression $H=\frac{\sqrt{234}\times\sqrt{5}}{\sqrt{13}\times\sqrt{180}}$

**2)** En utilisant les décompositions en éléments premiers, simplifier les expressions suivantes :

a) $I=\frac{35}{63}+\frac{2}{27}-\frac{51}{34}$ b) $J=\frac{\sqrt{288}+\sqrt{162}}{\sqrt{98}}$

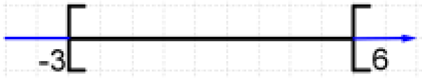
**Exercice 4 :** **Compléter :**

a) $[2;5]\cap[3;12]=$ c) $]-\infty;3]\cap[-5;10]=$

b) $[2;5]\cup[3;12]=$ d) $]-\infty;3]\cup[-5;10]=$

e) $\mathbb{R}_-^*\cap\mathbb{R}^+=$ f) $\mathbb{R}_-^*\cup\mathbb{R}^+=$

**Exercice 5 :** **Compléter le tableau suivant** :

| INTERVALLE | INEGALITE(S) | REPRESENTATION GRAPHIQUE | CET INTERVALLE SE LIT ....... | intervalle borné ou non borné ? |
|---|---|---|---|---|
| | $-5 < x \leq -0,5$ | | | |
| $[-3;+\infty[$ | | | | |
| | | | intervalle ouvert de $-\infty$ à 4 | |
| | |  | | |

**Exercice 6 :**

1. **Développer puis réduire (sur votre copie) :**

   **a)** $A = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)$

   **b)** $B = 8(x-1) - 7(1-x^2)(2x-3)$

   **c)** $C = (3x+1)(x-2) - (2x-3)^2$

2. **Factoriser au maximum:**

   **a)** $D = (x+2)(6x-3) - (1-2x)^2$

   **b)** $E = x^2(x+1) - x - 1$

   **c)** $F = (10x-5)(x+2) + (1-x)(2x-1)$

**Exercice 7 :**
Soit x et y deux réels tels que : $-2 \leq x \leq 3$ et $-5 \leq y \leq 6$

1) encadrer $\frac{1}{x-y}$

2) encadrer $x^2 \times y$

**Exercice 8 :**

Simplifier au maximum : $A = \frac{(-49)^5 \times 14^8 \times (-35)^3}{(-42^4) \times (-10)^6} - \frac{(-50)^5 \times 7^3 \times (-50^4)}{(-25)^5 \times (-2^6)}$

**Exercice 9 :**
Soit n un entier naturel non nul

1) démontrer que : $\frac{2}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}$

2) en déduire une expression simple de la somme S suivante :

$S = \frac{1}{2\times3\times4} + \frac{1}{3\times4\times5} + \frac{1}{4\times5\times6} + \dots\dots\dots + \frac{1}{30\times31\times32}$

# CORRIGE

**Exercice 1 :** QCM : → Si la réponse est FAUX, donner un contre exemple ou la bonne réponse.

**1)** $\mathbb{Z}$ s'appelle l'ensemble des entiers naturels. → **FAUX** : $\mathbb{Z}$ ensemble des entiers relatifs.

**2)** $\mathbb{N}$ s'appelle l'ensemble des entiers relatifs. → **FAUX** : $\mathbb{N}$ ensemble des entiers naturels.

**3)** **D** l'ensemble des nombres pouvant s'écrire: $\frac{\text{a}}{10^{\text{n}}}$ avec a entier relatif et n entier naturel. → **VRAI**

**4)** $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres pouvant s'écrire : $\frac{a}{b}$ avec a entier relatif et b entier naturel non nul → **VRAI**

**5)** $\mathbb{Q}$ est inclus dans **D**. → **FAUX** : $\mathbf{D} \subset \mathbb{Q}$

**6)** Un nombre irrationnel s'écrit à l'aide d'une racine. → **FAUX** : $\pi \in \mathbb{R}$

**7)** « Un nombre entier naturel est un nombre premier » signifie qu'il admet exactement 2 diviseurs entiers naturels : 1 et lui-même. → **VRAI**

**Exercice 2 :** Simplifier au max ces nombres, et donner le plus petit ensemble auquel ils appartiennent.

a) $\frac{24,6}{10,8} = \frac{246}{108} = \frac{2\times3\times41}{2\times3\times18} = \frac{41}{18} \in \mathbb{Q}$

b) $\frac{\sqrt{56}}{2\sqrt{40}} = \frac{\sqrt{4\times2\times7}}{2\sqrt{4\times2\times5}} = \frac{2\sqrt{2\times7}}{2\times2\sqrt{2\times5}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{7}}{2\sqrt{2}\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{5}} \in \mathbb{R}$

c) $\frac{15}{25} - \frac{2}{15} = \frac{3\times5}{5\times5} - \frac{2}{15} = \frac{3}{5} - \frac{2}{15} = \frac{9}{15} - \frac{2}{15} = \frac{7}{15} \in \mathbb{Q}$

d) $\frac{21-7\pi}{33-11\pi} = \frac{7\times3-7\pi}{11\times3-11\pi} = \frac{7(3-\pi)}{11(3-\pi)} = \frac{7}{11} \in \mathbb{Q}$

e) $3\left(3\sqrt{3}-\sqrt{48}\right)^2 = 3\left(3\sqrt{3}-\sqrt{16\times3}\right)^2 = 3\left(3\sqrt{3}-4\sqrt{3}\right)^2 = 3\left(-\sqrt{3}\right)^2 = 3\times3 = 9 \in \mathbb{N}$

**Exercice 3 :**

**3)** a) $234 = 2\times3^2\times13$ $\qquad 180 = 2^2\times3^2\times5$

b) $G = \frac{234}{180} = \frac{2\times3^2\times13}{2^2\times3^2\times5} = \frac{13}{2\times5} = \frac{13}{10}$

c) $H = \frac{\sqrt{234}\times\sqrt{5}}{\sqrt{13}\times\sqrt{180}} = \frac{\sqrt{2\times3^2\times13}\times\sqrt{5}}{\sqrt{13}\times\sqrt{2^2\times3^2\times5}} = \frac{3\sqrt{2\times13}\times\sqrt{5}}{\sqrt{13}\times2\times3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}\times\sqrt{13}}{\sqrt{13}\times2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

**4)** $I = \frac{35}{63} + \frac{2}{27} - \frac{51}{34} = \frac{7\times5}{7\times9} + \frac{2}{27} - \frac{17\times3}{17\times2} = \frac{5}{9} + \frac{2}{27} - \frac{3}{2} = \frac{6\times5}{54} + \frac{2\times2}{54} - \frac{27\times3}{54} = \frac{30+4-81}{54} = \frac{30+4-81}{54} = \frac{-47}{54}$

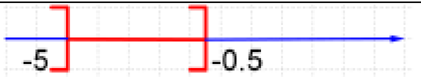
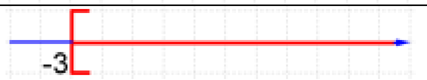
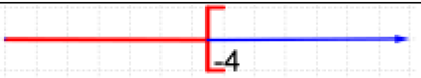
$J = \frac{\sqrt{288}+\sqrt{162}}{\sqrt{98}} = \frac{\sqrt{2^5\times3^2}+\sqrt{2\times3^4}}{\sqrt{2\times49}} = \frac{2^2\times3\sqrt{2}+3^2\sqrt{2}}{7\sqrt{2}} = \frac{12\sqrt{2}+9\sqrt{2}}{7\sqrt{2}} = \frac{21\sqrt{2}}{7\sqrt{2}} = \frac{21}{7} = 3$

**Exercice 4 :** Faites une étude graphique

a) $[2;5]\cap[3;12]=[3;5]$ $\qquad$ b) $[2;5]\cup[3;12]=[2;12]$ $\qquad$ c) $]-\infty;3]\cap[-5;10]=[-5;3]$

d) $]-\infty;3]\cup[-5;10]=]-\infty;10]$ $\qquad$ e) $\mathbb{R}_-^*\cap\mathbb{R}_+=\varnothing$ $\qquad$ f) $\mathbb{R}_-^*\cap\mathbb{R}_+=\mathbb{R}=]-\infty;+\infty[$

**Exercice 5 :** **Compléter le tableau suivant** :

| INTERVALLE | INEGALITE(S) | REPRESENTATION GRAPHIQUE | CET INTERVALLE SE LIT ……. | intervalle borné ou non borné ? |
|---|---|---|---|---|
| $]-5;-0,5]$ | $-5 < x \leq -0,5$ |  | **intervalle semi-ouvert de –5 à –0,5** | **borné** |
| $[-3;+\infty[$ | $-3 \leq x < +\infty$ |  | **intervalle semi-ouvert de –3 à +∞** | **non borné** |
| $]-\infty;-4[$ | $-\infty < x < -4$ |  | intervalle ouvert de – ∞ à 4 | **non borné** |
| $[-3;6[$ | $-3 \leq x < 6$ | | **intervalle semi-ouvert de –3 à 6** | **borné** |

## Exercice 6 :

1. Développer puis réduire:

$$A=3\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)=3\left(x^2-\frac{1}{9}\right)=3x^2-\frac{1}{3}$$

$$B=8(x-1)-7(1-x^2)(2x-3)=8x-8-7(2x-3-2x^3+3x^2)=8x-8-14x+21+14x^3-21x^2$$

$$B=14x^3-21x^2-6x+13$$

$$C=(3x+1)(x-2)-(2x-3)^2=(3x^2-6x+x-2)-(2x-3)(2x-3)$$

$$C=(3x^2-5x-2)-(4x^2-6x-6x+9)=3x^2-5x-2-4x^2+6x+6x-9=-x^2+7x-11$$

2. Factoriser au maximum:

$$D=(x+2)(6x-3)-(1-2x)^2=(x+2)\times3(2x-1)-(2x-1)^2=(2x-1)\left[(x+2)\times3-(2x-1)\right]$$

$$D=(2x-1)[3x+6-2x+1]=(2x-1)(x+7)$$

$$E=x^2(x+1)-x-1=x^2(x+1)-(x+1)=(x+1)(x^2-1)$$

$$F=(10x-5)(x+2)+(1-x)(2x-1)=5\times(2x-1)(x+2)+(1-x)(2x-1)$$

$$F=(2x-1)\left[5\times(x+2)+(1-x)\right]=(2x-1)(5x+10+1-x)=(2x-1)(4x+11)$$

On considère l'équation suivante : $\frac{4}{x+5}=\frac{1}{x-5}$

**1.** Cette équation existe si $x+5\neq0$ *et* $x-5\neq0$, soit si : $x\neq-5$ *et* $x\neq5$

**2.** Produit en croix (sans oublier les parenthèses) :

$4\times(x-5)=1\times(x+5)$ , soit : $4x-20=x+5$

Ainsi : $3x=25$ donc $x=\frac{25}{3}$

## Exercice 7 :

Soit x et y deux réels tels que : $-2\leq x\leq3$ et $-5\leq y\leq6$

1) encadrer $\frac{1}{x-y}$ →valeurs interdites : il faut que $x-y\neq0$ soit $x\neq y$

$-5\leq y\leq6$ donc $5\geq-y\geq-6$ soit $-6\leq-y\leq5$

Ainsi : $-2-6\leq x-y\leq3+5$ soit $-8\leq x-y\leq8$

Si $-8\leq x-y<0$ alors $\frac{1}{-8}\geq\frac{1}{x-y}>-\infty$ soit $-\infty<\frac{1}{x-y}<-\frac{1}{8}$

Si $0<x-y\leq8$ alors $+\infty\geq\frac{1}{x-y}>\frac{1}{8}$ soit $\frac{1}{8}<\frac{1}{x-y}<+\infty$

2) encadrer $x^2\times y$

Si $-2\leq x\leq0$ alors $(-2)^2\geq x^2\geq0^2$ soit $0\leq x^2\leq4$

Si $0\leq x\leq3$ alors $0^2\leq x^2\leq3^2$ soit $0\leq x^2\leq9$

Donc si $-2\leq x\leq3$ alors $0\leq x^2\leq9$

Si $-5\leq y\leq0$ alors $9\times(-5)\leq x^2\times y\leq9\times0$ soit $-45\leq x^2\times y\leq0$

Si $0\leq y\leq6$ alors $9\times0\leq x^2\times y\leq9\times6$ soit $0\leq x^2\times y\leq54$

AINSI : si $-2\leq x\leq3$ et $-5\leq y\leq6$ alors $-45\leq x^2\times y\leq54$

**Exercice 8 :**

$$A=\frac{(-49)^5\times14^8\times(-35)^3}{\left(-42^4\right)\times(-10)^6}-\frac{(-50)^5\times7^3\times\left(-50^4\right)}{(-25)^5\times\left(-2^6\right)}=\frac{-49^5\times14^8\times\left(-35^3\right)}{\left(-42^4\right)\times10^6}-\frac{\left(-50^5\right)\times7^3\times\left(-50^4\right)}{\left(-25^5\right)\times\left(-2^6\right)}$$

$$A=\frac{-49^5\times14^8\times35^3}{42^4\times10^6}-\frac{50^5\times7^3\times50^4}{25^5\times2^6}=-\frac{\left(7^2\right)^5\times(7\times2)^8\times(7\times5)^3}{(7\times2\times3)^4\times(5\times2)^6}-\frac{\left(5^2\times2\right)^5\times7^3\times\left(5^2\times2\right)^4}{\left(5^2\right)^5\times2^6}$$

$$A=-\frac{7^{10}\times7^8\times2^8\times7^3\times5^3}{7^4\times2^4\times3^4\times5^6\times2^6}-\frac{\left(5^2\right)^5\times2^5\times7^3\times\left(5^2\right)^4\times2^4}{5^{10}\times2^6}=-\frac{7^{21}\times2^8\times5^3}{7^4\times2^{10}\times3^4\times5^6}-\frac{\boxed{5^{10}}\times2^9\times7^3\times5^8}{\boxed{5^{10}}\times2^6}$$

$$A=-\frac{7^{17}}{2^2\times3^4\times5^3}-2^3\times7^3\times5^8=\frac{-7^{11}\times5^3-2^3\times7^3\times5^8\times2^2\times3^4\times5^3}{2^2\times3^4\times5^3}=\frac{-5^3\times7^{11}-2^5\times3^4\times5^{11}\times7^3}{2^2\times3^4}$$

**Exercice 9 :**

Soit $n$ un entier naturel non nul

1) $$\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}=\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)(n+2)}-\frac{2n(n+2)}{(n+1)n(n+2)}+\frac{n(n+1)}{(n+2)n(n+1)}$$

$$=\frac{n^2+2n+n+2}{n(n+1)(n+2)}-\frac{2n^2+4n}{n(n+1)(n+2)}+\frac{n^2+n}{n(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{n^2+2n+n+2-\left(2n^2+4n\right)+\left(n^2+n\right)}{n(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{n^2+2n+n+2-2n^2-4n+n^2+n}{n(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{2}{n(n+1)(n+2)}$$

2) D'après le 1), on a : $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$

$$S=\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}+\frac{1}{4\times5\times6}+\dots\frac{1}{30\times31\times32}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{5}+\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{6}+\frac{1}{7}\right)+\dots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{29}-\frac{2}{30}+\frac{1}{31}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{30}-\frac{2}{31}+\frac{1}{32}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}-\frac{2}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{5}-\frac{2}{6}+\frac{1}{7}+\dots+\frac{1}{29}-\frac{2}{30}+\frac{1}{31}+\frac{1}{30}-\frac{2}{31}+\frac{1}{32}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{2}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{2}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{2}{6}+\frac{1}{7}+\dots+\frac{1}{29}-\frac{2}{30}+\frac{1}{30}+\frac{1}{31}-\frac{2}{31}+\frac{1}{32}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{31}-\frac{2}{31}+\frac{1}{32}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{31}+\frac{1}{32}\right)$$